高等学校数学における比と比例

著者名(日)	田端 輝彦，萬 伸介
雑誌名	宮城教育大学紀要
巻	42
ページ	63-71
発行年	2007
URL	http://id.nii.ac.jp/1138/00000077/

高等学校数学における比と比例

*田　端　輝　彦・**萬　　　伸　介

Ratio and Proportion in Mathematics for Upper Secondary Shcool

TABATA Teruhiko and YOROZU Shinsuke

Abstract

We take up some topics in textbooks: "Fundamentals of Mathematics", "Mathematics I" and "Mathematics A", and we try to distinguish the notion of "ratio" and "proportion" in mathematics for upper secondary school. From the view point of the ratio and the proportion, we have understanding of the fact keeping in close contact with Mathematics curricula among elementary, lower secondary and upper secondary schools. Moreover, we give a approch to "proportion" with the notion of equivalence relation.

Key words：Ratio（比），Proportion（比例）

1．はじめに

本稿の目的は，高等学校数学において「比」と「比例」がどのように取り扱われているかを教科書を資料として調べることにある．具体的には，東京書籍と数研出版の教科書で，どの内容のところで，どのように取り扱われているか拾い上げ，その内容，取り扱い方などについて私見を述べたい．これによって高等学校数学のカリキュラムの再構築に対する情報・資料の提供ができるようにしたい．なお本稿では，小学校や中学校での「比」と「比例」学習との連携を意識し，高等学校第１学年で履修する「数学基礎」,「数学Ⅰ」,「数学A」を見ることにする．したがって第２学年，第３学年に関わる部分は，別の機会に発表する予定である．

2．比と比例の定義について

矢野健太郎編「数学小辞典」([15]）によれば，「比」と「比例」に関する用語は以下のように述べられている．

「比」([15]，p.466)：「a，b を二つの数または同種の量とするとき，a が b の何倍であるかという，a と b の関係を a と b の比といい，$a:b$ で表わす．これを『a 対 b』と読む．このとき，a をこの比の前項，b を後項という．」

「比の値」([15]，p.473)：「比 $a:b$ に対し，$a \div b$ を計算した結果，すなわち分数 a/b の値を比 $a:b$ の値という．」

「比例」([15]，p.484)：「一般に，二つの変化する量 x と y があって，これらがともに関係しながら変化して，x が２倍，３倍，……となれば，それにつれて y も２倍，３倍，……となるとき，x と y は比例するという．このとき $y=kx$ という関係がある．ここで k はある定数である．この k を比例定数という．」

「比例関係」([15]，p.484)：「x と y との間の比例の関係 $y=ax^n$（a は定数），x_1，……，$x_n y$ との間の複比例の関係 $y=ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots\cdots x_n^{\alpha_n}a$ は定数）を合わせて，一

＊　数学教育講座
＊＊　数学教育講座

般に比例関係という.」

「比例式」([15], p.485):「二つの比 $a:b$ と $c:d$ の値が等しいことを表わす式 $a:b=c:d$ のこと. この式は $a/b=c/d$ と書くこともできる.」

一方, 平成10年告示の学習指導要領によれば,「比」と「比例」は小学校第6学年の「D数量関係」で学習することになっている.

「比」について, 東京書籍「新しい算数　6　下」では「2と3の割合を『:』の記号を使って, 2:3と表すことがあります. 2:3は『二対三』と読みます. このように表された割合を**比**といいます.」([1], p.34) と記述され, さらに,「2:3は『2と3の比』ともいいます.」と追記されている.

また「比例」については, 東京書籍「新しい算数　6　下」では「一方の量(□)の値が2倍, 3倍, ……になると, それにともなってもう一方の量(○)の値も2倍, 3倍, ……になるとき,『○は□に**比例**する』といいます.」([1], p.46) と記述されている.

中学校第1学年で学習する「D数量関係」では,「具体的な事象を通して, 関数関係を見いだし表現し考察することを学習する.」「中学校では, 特に, 二つの数量の間の関係の考察における式の有用性について理解する.」([11], p.50) をうけて, 比例式を飛び越して式 $y=ax$ を主としている. 小学校での「比例的推論」に関わる問題を, 比例式を立式し, それから1次方程式を得て, それを解くという指導は中学校第1学年の「一元一次方程式を解く」で指導可能と考えられるが, 残念ながら現在の教科書にはその記述がない.

「比」(ratio) と「比例」(proportion) をG.L. Musser, W.F. Burger, B.E. Peterson ([20], p.286-p.296) は次のように定義している:

DEFINITION Ratio
A **ratio** is an ordered pair of numbers, written $a:b$, with $b \neq 0$
DEFINITION Equality of Ratios
Let $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ be any two ratios. Then $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ if and only if $ad=bc$.
DEFINITION Proportion
A **proportion** is a statement that two given ratios are equal.

このように,「比は二つの数の順序対である」と定義しており, 数学の立場を強調したものになっている. 日本との違いに注目したい.

3.「数学基礎」における取り扱い

数学基礎は,「生涯学習の基礎を培う科目の1つとして, 具体的な事象の考察を通して, 数学と人間とのかかりわりや文化や司会生活において数学が果たしている役割について理解させ, 数学に対する興味・関心を高めるとともに, 数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てること」[12], p.26-p.27) にある. 以下では, 東京書籍, 数研出版の「数学基礎」の教科書で取り上げられている「比」と「比例」に関わる内容を取り上げてみたい.

(1) 数学と人間の活動

ア　数と人間

数列を構成する数の間の規則性を推測するなかで, 等比数列を例示している.

イ　図形と人間

折り紙で3:4:5と5:12:13を三辺の長さの比(連比)とする直角三角形を作る方法を紹介し, 三辺の連比が確かにそのようになっていることを証明している.

(2) 社会生活における数理的な考察

ア　社会生活と数学

消費税率や「一定期間につく利息の割合を利率という」を具体例で説明している. さらに, 単利法と複利法を具体例で説明している.

イ　身近な事象の数理的な考察

曲がった道の面積が「道の面積=道幅×道のり」と表されることを説明している. トイレットペーパーやビデオカセットのロール紙やテープの厚さ等を具体的に求める例を与えている. これらは, 三つの量 A, B, C の間に $A=B\times C$ が成り立ち, A が B または C に比例していることを示している. 比例関係が身近なところに出現していることを改めて認識する機会である.

(3) 身近な統計

ア　資料の整理

データのグラフ化において, 全体に対する部分の割

合を円の中心角の割合に対応させることによって，円グラフを描くことを課している．また，「それぞれの度数の全データ数に対する割合を相対度数といい，…….」との記述もある．

イ　資料の傾向の把握

平均値，分散，標準偏差など比の値に関わる事柄が具体例と共に説明されている．

このように，東京書籍，数研出版の「数学基礎」（[９]，[10]）においては，「比」と「比例」に関わる事柄が数多く取り上げられており，「比」と「比例」の概念が「社会生活において数学が果たしている役割」（[12]，p.31）の重要性を示していると考えられる．

４．「数学Ⅰ」における取り扱い

⑴　方程式と不等式

ア　数と式

「分母の有理化」（東京書籍［５］，p.33，数研出版［７］，p.29）は「分母，分子に同じ数を乗じても比の値は変わらない」に基づくことである．

ウ　二次方程式

２次方程式の応用として次の例題５を提示している（東京書籍［５］，p.57）．

「例題５　右図の長方形$ABCD$において，
辺AD，BC上にそれぞれ点E，Fを
$CD=DE=CF$
となるように定めたところ，長方形$ABFE$が
もとの長方形$ABCD$と相似になった．
$AB=1$とするとき，辺ADの長さを求めよ．」

この例題の解答は以下のように示されている．

「解　$AD=x$とすると
$AE=AD-DE=x-1$
となるから，２つの長方形が相似であることより
$AB:AE=AD:AB$
すなわち，$1:(x-1)=x:1$
したがって，$x(x-1)=1$
$x^2-x-1=0$
これを解くと，$-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
AEが正より，$x>1$であるから，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

答　$AD=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　」

この例題とその解が意味することは重要である．すなわち，求めたいものを含む**比例式が成り立つ**ことから，求めたいものを未知数とする**方程式を導き**，その**方程式**を解く，という手順が示されたものである．「相似比が等しいことから比例式が成り立ち，その比例式が成り立つことから方程式が導かれる．」というこの取り扱いは，中学校第１学年（[２]）の「Ｄ数量関係」において学習する「比例・反比例」で比例式を導入するという我々の立場からは良しとする事柄である．中学校第１学年での「比例式」と第３学年（[４]）での「相似」の学習を受けて高等学校第１学年で上記のような例題を取り上げることは，基礎事項の復習と学習事項の連結性の面から見ても，その適時性は問題ないと考えられる．「比例式」という用語は，二三の高等学校の教科書「数学Ⅱ」において触れられているのみであるから，第１学年での学習は時期を得ている．

注　多くの場合，「相似比が等しいことから方程式が成り立つ．」という立場での取り扱いが主である．「比例式が成り立つ」という段階を省略していると思われる．

⑶　図形と計量

ア　三角比

一つの内角が直角でもう一つの内角の大きさが一定であるすべての直角三角形において，直角を挟む二つの辺の長さの比の値は一定である．これは，これらすべての三角形が相似であることから保証されることである．このことより，三角比の正接（すなわち，tan）を次のように定義している（東京書籍［５］，p.105）．

「$\angle C$が直角である直角三角形$\triangle ABC$において，$\dfrac{BC}{AC}$の値は$\triangle ABC$の大きさに関係なく，$\angle A$の大きさだけで定まる．$\angle A$の大きさをふつうAで表し，$\dfrac{BC}{AC}$をAの正接またはタンジェントといい，$\tan A$と書く．」

数研出版（[７]，p.102）も同様である．正接，正弦，余弦はいずれも三角形の二つの辺の長さの比の値で定

義されているのである.

イ　三角比と図形

正弦定理は「比」と「比例」に関わる定理である. すなわち,「三角形の内角の大きさの正弦に対するその角の対辺の長さの比は一定であり, 一定である比の値はこの三角形の外接円の半径（の長さ）の2倍である.」ととらえることができる. 通常, △ABCの三つの角∠A, ∠B, ∠Cの大きさをそれぞれA, B, Cで表し, それらの角の対辺の長さをそれぞれa, b, cで表すとき, 正弦定理は

「△ABCの外接円の半径をRとすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

が成り立つ.」

である（東京書籍［5］, p.122, 数研出版［7］, p.120). これは三つの比の値が一定で, その一定値は2Rであることを示している. 上記は△ABCにおいて

$$a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C$$

あるいは

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

という比例式が成り立つことを主張している. このような取り扱いは, 数研出版の注意（［7］, p.121）で記述されている.「連比」は中学校第3学年（［4］）で学習する「三角形の相似条件」の「3組の辺の比が等しい」のところで説明ができる事項であるが, これも現在の教科書にはない.

△ABCの面積の値Sは二つの辺の長さとその間の角の大きさの正弦によって

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ &=\frac{1}{2}ca\sin B\\ &=\frac{1}{2}ab\sin C \end{aligned}$$

で与えられる（東京書籍［5］, p.129, 数研出版［7］, p.132）を用いて, 角の2等分線と三角形の面積の項において次の事柄を述べている. △ABCにおいて, ∠Aの2等分線と対辺BCとの交点をDとするとき

$$\triangle ABD:\triangle ADC=AB:AC$$

が成り立つことを示している（東京書籍［5］, p.130). さらに, 頂点Aから対辺BCに下ろした垂線AHの長さをhとおけば

$$\begin{aligned} \triangle ABD:\triangle ADC&=\frac{1}{2}BD\cdot h:\frac{1}{2}DC\cdot h\\ &=BD:DC \end{aligned}$$

が成り立つことを示している. これらは角の2等分線によって得られる二つの三角形の面積の値の比の値が三角形の辺の長さの比の値に等しいことを示している.「同種の比」の立場によるものである. ところで, 上記二つの「等式」から次の「等式」

$$AB:AC=BD:DC$$

が得られることが指摘されている（東京書籍［5］, p.131). これは「数学A」で取り扱われる結果であり, 二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を二等分するという結果を出発点とする一連の中にある結果である（萬, 田端, 森岡［17］).

相似な平面図形の面積比について,

「相似な平面図形で, 対応する部分の長さがk倍ならば, 面積はk^2倍である. また, 相似比が$m:n$ならば, 面積比は$m^2:n^2$である.」

と記述している（東京書籍［5］, p.135, 数研出版［7］, p.143).

相似な立体の表面積と体積については以下のような記述がある.

「相似な立体で, 対応する部分の長さがk倍ならば, 表面積はk^2倍である. また, 相似比が$m:n$ならば表面積の比は$m^2:n^2$である.」

と記述している（東京書籍［5］, p.136, 数研出版［7］, p.147).

「相似な立体で, 対応する部分の長さがk倍ならば, 体積はk^3倍である. また, 相似比が$m:n$ならば体積比は$m^3:n^3$である.」

と記述している（東京書籍［5］, p.137, 数研出版［7］, p.143).

このような状況のなか,「比を求めよ.」という設問の問題は少数である.

5.「数学A」における取り扱い

⑴　平面図形

ア　三角形の性質

三角形の性質で比が関わる基礎的事柄は, 中学校で学んだ「三角形の相似条件」,「平行線と線分の比」,「中点連結定理」である（［2］, ［3］, ［4］). そして,

次の三角形における比についての定理が紹介されている（東京書籍［6］，p.80，数研出版［8］，p.91）．

「定理　△ABCの辺AB，AC上に，それぞれ点D，Eがあるとき

⑴　$DE//BC$ならば

$AD:AB=AE:AC=DE:BC$

$AD:DB=AE:EC$

⑵　$AD:AB=AE:AC$ならば$DE//BC$

⑶　$AD:DB=AE:EC$ならば$DE//BC$，」

次の中点連結定理も中学校での既習として裏表紙の裏で紹介されている．

「定理　△ABCの２辺AB, ACの中点をそれぞれM，Nとすると，

$MN//BC$，$MN=\dfrac{1}{2}BC$，」

これは「三角形における比」と「平行四辺形の性質」を用いて証明される．

内分と外分（東京書籍［6］，p.82，数研出版［8］，p.91）は「線分AB上に点Pがあり，$AP:PB=m:n$であるとき，PはABを$m:n$の比に内分するという．また，線分ABの延長上に点Qがあり，$AQ:QB=m:n$であるとき，QはABを$m:n$の比に外分するという．」と記述されている．これは次の三角形の内角と外角の二等分線（東京書籍［6］，p.83，数研出版［8］，p.92）において用いられている．

「定理　△ABCの∠Aの二等分線と対辺BCとの交点をPとすれば，点PはBCを$AB:AC$に内分する．すなわち

$BP:PC=AB:AC$」

「定理　△ABCの∠Aにおける外角の二等分線と対辺BCの延長との交点をQとすれば，点QはBCを$AB:AC$に外分する．すなわち

$BQ:QC=AB:AC$」

そして，上記の二定理の逆，すなわち

「定理　△ABCにおいて，辺BCを$AB:AC$の比に内分および外分する点をそれぞれP，Qとすると

⑴　APは頂点Aにおける内角を二等分する．

⑵　AQは頂点Aにおける外角を二等分する．」

を紹介することも十分に可能であろう．これらの定理は「二等辺三角形において，頂角の二等分線は底辺を二等分する．」とその逆を出発点とする一連の学習の流れに位置するものである（萬，田端，森岡［17]）．

内分と外分は，「数学Ⅱ」において分点の座標表示が与えられ，「数学Ｂ」において分点の位置ベクトル表示が与えられる，と後の学習へと連結してゆく．しかしながら，「補間法」（[13]）等解析学に関わる分野への応用については高等学校では取り扱われていない．

比に関しては，次の定理も重要である．

「定理　三角形の３つの中線は１点で交わる．その交点はそれぞれの中線を２：１に内分する．」

３つの中線の交点はこの三角形の重心であり，三角形の外心，内心へと話題を広げることになる（東京書籍［6］，p.85-p.87，数研出版［8］，p.93-p.95）．

また，東京書籍［6］，p.88-p.91において

「定理（チェバの定理）　△ABCの３辺BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rがあり，３直線AP，BQ，CRが１点で交われば

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CA}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$」

「定理（メネラウスの定理）ある直線が△ABCの辺BC，CA，ABまたはその延長とそれぞれ点P，Q，Rで交われば

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CA}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$」

を証明しており，チェバの定理はその逆も成り立つことが証明されている．チェバの定理とメネラウスの定理は，現在の教育内容から見ると，難しいものであるが，「幾何のおもしろさ」を実感できる問題を提供できる点では意味あると思う．

イ　円の性質

中学校で学習した円周角と中心角について（[3]），次の定理を提示している（東京書籍［6］，p.95，数研出版［8］，p.101）．

「定理　⑴　１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である．

⑵　１つの円で，等しい円周角に対する弧は等しい．

⑶　１つの円で，等しい弧に対する円周角は等しい．」

これにより，一つの円において，円周角の大きさとその円周角に対する弧の長さの間に比例関係があることが推測される．また，一つの円において，中心角の

大きさとその中心角に対する弧の長さの間の比例関係に注目して「弧度法」が導入されるのである.「弧度法」は「数学Ⅱ　(3)　いろいろな関数　ア　三角関数」で導入される.

定円と一定点が与えられたとき，この一定点を通る二つの直線と円が四つの点で交わるとする．この一定点とこれら四つの点の間の距離に関する「方べきの定理」(東京書籍 [6], p.106, 数研出版 [8], p.113-p.114)は「比」と「比例」に関わる定理であると見なすことができる.

「定理　円Oの外部の点Pから，円Oと2点A, Bで交わる直線と，円Oと2点C, Dで交わる直線を引くと

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$」

「定理　円Oの内部の点Pを通る2本の弦AB, CDをとると

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$」

これらは，二角相等の相似定理より，二つの三角形が相似となることを示し，それより

$$PA : PD = PC : PB$$

が得られることによって証明される．従って，これらの定理は「比」と「比例」に関わるものである.

(3)　場合の数と確率

イ　確率とその基本的な法則

「ある試行において，起こり得るすべての結果がN個あり，各結果からなる根元事象は同様に確からしいとする．この試行における全事象Uは，$n(U) = N$個の根元事象からなる．ここで，事象Aが$n(A) = a$個の根元事象からなるとき，事象Aの**確率**を$\dfrac{a}{N}$で定め，P(A) と書く.」と比の値である事象が起こる確率を定義している（東京書籍 [6], p.54, 数研出版 [8], p.46)．これは,「数学C　(3)　確率分布　ア　確率の計算」において,「条件つき確率」が比の値で定義されることへと引き継いで行くのである.

6．図形と同値関係

図形と「比」と「比例」に関わる「数学Ⅰ」と「数学A」の内容のいくつかを大学教育の視点でとらえる．すなわち，比例を同値関係（[15], p.410）でとらえた「第一次比例をなす」,「第二次比例をなす」（[19]）の立場でとらえる．なお，この部分は [18] の一部に修正を加えたものである.

平面α上の三角形の全体の集合をTとし，相似比$|k|(\neq 0)$の相似変換をf_kとする（[14], p.44)．積集合$\mathrm{T} \times f_k(\mathrm{T})$ 上に同値関係$\simeq$を定義する．すなわち，$m(\triangle ABC)$ は$\triangle ABC$の面積の値を表すとして

$$(\triangle ABC,\ f_k(\triangle ABC)) \simeq (\triangle DEF,\ f_k(\triangle DEF))$$

とは

$$\begin{aligned} m(\triangle ABC) \times m(f_k(\triangle DEF)) &= k^2 \times m(\triangle ABC) \times m(\triangle DEF) \\ &= m(\triangle DEF) \times m(f_k(\triangle \mathrm{ABC})) \end{aligned}$$

が成り立つときであると定義する．商集合$\mathrm{T} \times f_k(\mathrm{T})/\simeq$の二つの要素（同値類）が等しいとき，すなわち,

$$[(\triangle \mathrm{ABC},\ f_k(\triangle \mathrm{ABC}))]\simeq = [(\triangle PQR,\ f_k(\triangle PQR))]\simeq$$

のとき,

$$\triangle ABC : f_k(\triangle ABC) = \triangle PQR : f_k(\triangle PQR)$$

と表す．ここで，$f_k(\triangle \mathrm{ABC}) = \triangle A'B'C'$と表現することにするならば，上式は

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \triangle PQR : \triangle P'Q'R'$$

と表示される．よって，[9] により

$$\triangle ABC,\ \triangle A'B'\mathrm{C}',\ \triangle P'Q'R',$$

は第一次比例をなすという.

集合seg(T) はTに属する三角形の辺の全体を表すとする．このとき，相似変換f_kは写像$\hat{f}_k : \mathrm{seg}(T) \to \mathrm{seg}(T)$ を誘導する．すなわち,

$f_k(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$のとき,

$$\hat{f}_k(\mathrm{AB}) = A'B'$$

によって写像$\hat{f}_k : \mathrm{seg}(T) \to \mathrm{seg}(T)$ を定義する．任意の$\triangle ABC$, $\triangle DEF \in \mathrm{T}$に対して

$$f_k(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$
$$f_k(\triangle DEF) = \triangle D'E'F'$$

であるとすると

$$\hat{f}_k(AB) = A'B',\ \hat{f}_k(DE) = D'E'$$

となる．これより，線分ABの長さの値を$l(AB)$ と表すことにすると

$$\begin{aligned} l(AB) \times l(\hat{f}_k(DE)) &= k \times l(AB) \times l(DE)) \\ &= l(DE) \times l(\hat{f}_k(AB)) \end{aligned}$$

が成り立つから，集合 $\mathrm{seg}(T)\times\hat{f}_k(\mathrm{seg}(T)$ 上に同値関係～が定義される．例えば

$$(AB,\ \hat{f}_k(AB))\sim(DE,\ \hat{f}_k(DE))$$

すなわち，$(AB,\ A'B')\sim(DE,\ D'E')$ である．商集合 $\mathrm{seg}(T)\times\hat{f}_k(\mathrm{seg}(T))/\sim$ の二つの要素（同値類）の相等

$$[(AB,\ A'B')]_{\sim}=[(DE,\ D'E')]_{\sim}$$

から，

$$AB:A'B'=PQ:P'Q'$$

を得る．よって，[19] により

$$AB,\ A'B',\ PQ,\ P'Q'$$

は第一次比例をなすという．

㊟　上式より

$$AB:PQ=A'B':P'Q'$$

を得るから，[9] により

$$AB,\ PQ,\ A'B',\ P'Q'$$

は第二次比例をなすといえる．

平面 α 上の一点 A を定め，点 A を中心とする倍率 k（$\neq 0$）である中心拡大（相似変換の一つである）を $f_{A,k}$ とする（[14]）．集合 T_A は，点 A を端点とする二つの半直線 AX, AY のそれぞれに任意に点をとり，A とこれら二点によって定まる三角形の全体の集合とする．集合 T_A は集合 T の部分集合である．このとき，写像 $f_{A,k}$ を集合 T_A に制限した制限写像を同じ記号 $f_{A,k}$ で表すことにすると，$f_{A,k}:\mathrm{T}_A\to\mathrm{T}_A$ である．写像 T_A は写像 $\hat{f}_{A,k}:\mathrm{seg}(T_A)\to\mathrm{seg}(T_A)$ を誘導する．$f_{A,k}(\triangle ABC)=\triangle AB'C'$ とするとき，

$$\hat{f}_{A,k}(AB)=AB'$$
$$\hat{f}_{A,k}(AC)=AC'$$
$$\hat{f}_{A,k}(BC)=B'C'$$

となる．よって，集合 $\mathrm{seg}(T_A)\times\hat{f}_{A,k}\,\mathrm{seg}(T_A))$ 上に同値関係 $<A>$ が定義できる．そして，商集合

$$\mathrm{seg}(T_A)\times\hat{f}_{A,k}\,\mathrm{seg}(T_A))/<\mathrm{A}>$$

の要素（同値類）に対して

$$[(AB,\ AB')]_{<A>}=[(AC,\ AC')]_{<A>}$$
$$[(AB,\ AB')]_{<A>}=[(BC,\ BC')]_{<A>}$$

が成り立つ．すなわち，

$$AB:AB'=AC:AC',$$
$$AB:AB'=BC:BC'$$

が成り立ち，AB, AB', AC, AC' および AB, AB', BC, BC' がそれぞれ第一次比例をなす．[9] によると

$$AB:AC=AB':AC,$$
$$AB:BC=AB':BC'$$

が成り立ち，AB, AC, AB', AC' および AB, BC, AB', BC' がそれぞれ第二次比例をなすといえる．

注：上記の式は中学校第 3 学年の「Ｂ図形 ⑴」において「三角形と比に関する定理」として学習し（[2], p.85),「数学Ａ」で復習している（[6], p.80).

例 1：

$\triangle ABC'$ を考える．このとき，点 B は半直線 AX 上にあり，点 C' は半直線 AY 上にあるとする．$\triangle ABC'$ の内角 $\angle B$ の二等分線が辺 AC' と交わる点を C とする．点 C は二点 A と C' の間にある．半直線 AX 上に点 B' を，$l(BB')=l(BC')$ をみたし，直線 AX 上において点 B に関して A と反対側にあるようにとる．このとき，正の定数 $k(=l(AB')/l(AB))$ が定まり，写像 $\hat{f}_{A,k}$ によって

$$\hat{f}_{A,k}(AB)=AB',\ \hat{f}_{A,k}(AC)=AC'$$

となるから，

$$[(AB,\ AB')]_{<A>}=[(AC,\ AC')]_{<A>}$$

が成り立つ．よって，

$$(*)\ AB:AB'=AC:AC'$$

を得るから，AB, AB', AC, AC' は第一次比例をなす．（＊）より $l(AB)\times l(AC')=l(AB')\times l(AC')$ が成り立っていることを用いると

$$l(AB)\times l(CC')=l(BC')\times l(AC)$$

となるから，

$$(*')\ AB:BC'=AC:CC'$$

を得る．これは，$\triangle ABC$ の $\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点を C' としたとき，「数学Ａ」で学習する「内角の二等分線と辺の比」で示される比例式である（[6], p.83; [8], p.92)．（＊′）は「第一次比例をなす」から式変形で導き出されたもので，同値類の相等から直接的に導かれたものでない．

平面 α 上に直線 ℓ と ℓ 外の一点 A を定める．集合 $\mathrm{seg}(\ell)$ は直線 ℓ 上の線分全体の集合とし，集合 T_ℓ^A は点 A と直線 ℓ 上の線分によって定まる三角形の全体の集合（集合 T の部分集合である）とする．写像

$$f_{\ell,A}:\mathrm{seg}(\ell)\to\mathrm{T}_\ell^A$$

を $f_{\ell,A}(BC)=\triangle ABC$ によって定義する．このとき，集合 $\mathrm{seg}(\ell)\times\mathrm{T}_\ell^A$ 上に同値関係 $<\ell,\ A>$ が定義できる．点 A と直線 ℓ の距離を h とすると

$$l(BC) \times m(\triangle ADE)$$
$$= (h/2) \times l(BC) \times l(DE)$$
$$= m(\triangle ABC) \times l(DE)$$

が成り立つ．よって，$f_{\ell \cdot A}(BC) = \triangle ABC$ と $f_{\ell \cdot A}(DE) = \triangle ADE$ より

$$(BC, \triangle ABC) < \ell, A > (DE, \triangle ADE)$$

を得る．これより

$$BC : \triangle ABC = DE : \triangle ADE$$

が成り立つから，BC，$\triangle ABC$，DE，$\triangle ADE$ は第一次比例をなす．従って，

$$BC : DE = \triangle ABC : \triangle ADE$$

より，BC，DE，$\triangle ABC$，$\triangle ADE$ は第二次比例をなす．

例２：

ABC の辺 BC 上に点 D を二点 B と C の間にとる．直線 BC を直線 ℓ とみなし，点 A は ℓ 外にある．上述の議論より

$$BD : \triangle ABD = DC : \triangle ADC$$

を得る．更に，もし直線 AD が $\angle A$ の二等分線となるならば，前述の（$*'$）の結果から

$$AB : BD = AC : DC$$

が成り立ち，これら二つの式から

$$(**)\ AB : \triangle ABD = AC : \triangle ADC$$

を得る．これは「数学Ⅰ」の「⑶　図形と計量　イ　三角比と図形」で学習する（［５］，p.130）．（$**$）は同値類の相等から直接的に導かれたものではないことに注意しなければならない．

７．おわりに

本稿の目的は，高等学校第１学年で指導されている数学において「比」と「比例」がどのように取り扱われているかを教科書を資料として調べることにあった．

研究の結果，以下のことが明らかとなった．

高等学校第１学年の学習内容は，「比」と「比例」に関わる事柄に関して，中学校での学習内容を復習する機会を多く設定しているが，この点は十分に評価できることである．「数学基礎」を学習する生徒はそれほど多くないと思われるが，社会生活における数学の役割として，「比」と「比例」の考え方，「比」と「比例」の適用の仕方が多くの場面に出現していることが提示されている．社会生活のみならず科学における数学の役割の重要性を意識させるという趣旨は他の数学科目でもおろそかにできないものである．「数学Ⅰ」，「数学Ａ」の学習指導のなかで，教師が「比」と「比例」に関わる教材を提示することは可能である．中学校で学習した数学，理科のみならず，例えば，家庭科（田端　他［12］）等の教科でも「比」と「比例」の取り扱いを経験している．従って，「比」と「比例」は，生徒達にとって，身近なものであり，難しいものではないと思われる．「比」と「比例」は科学における「豊かな発想」の基になるものである．そのような観点から以下の点を主張したい．

・中学校第３学年で「相似」に関わるかたちで「比」と「比例」，「比の値」，「比例式」が指導できる．従って，図形問題において「比例式」に関わる１次方程式の解法が可能である．これらは高等学校の学習へと引き継がれるべき内容である．

・「相似」などの既習事項に関わる「比」，「比の値」，「比例式」を高等学校第１学年において復習指導し，「比例式から方程式を得て，その方程式を解く」という思考の流れを確定すべきと考える．「それぞれの比の値が一定であるから，……が成り立つ.」という表現の徹底もはかりたい．得られる方程式は１次方程式や２次方程式である．

・一つの「比の値」のみではなく，いくつかの「比の値」に対して，「それぞれの比の値が一定」であるから，関係式 $y = ax$，（a は定数）が得られるのである．

・図形に関わる「比」と「比例」も，中学校での学習から引き続く内容であることを十分に生徒に伝えながらの指導が必要である．

引用・参考文献

［１］杉山吉茂　他「新編　新しい算数６　下」，東京書籍，平成16年１月検定済，平成17年７月発行
［２］杉山吉茂　他「新しい数学１」，東京書籍，平成13年３月検定済，平成15年２月発行
［３］杉山吉茂　他「新しい数学２」，東京書籍，平成13年３月検定済，平成15年２月発行
［４］杉山吉茂　他「新しい数学３」，東京書籍，平成13年３月検定済，平成15年２月発行
［５］飯高茂　他「数学Ⅰ」，東京書籍，平成14年２月検定済，

平成15年２月発行
[６] 飯高　茂　他「数学Ａ」，東京書籍，平成14年３月検定済，平成15年２月発行
[７] 大島利雄　他「数学Ⅰ」，数研出版，平成14年２月検定済，平成15年１月発行
[８] 大島利雄　他「数学Ａ」，数研出版，平成14年３月検定済，平成15年１月発行
[９] 飯高茂　他「数学基礎」，東京書籍，平成14年１月検定済，平成15年２月発行
[10] 岡部恒治　他「楽しく学ぶ　数学基礎」，数研出版，平成14年１月検定済，平成15年１月発行
[11] 文部科学省「中学校学習指導要領（平成10年12月）解説－数学編－」平成16年５月一部補訂，大阪書籍，平成16年10月発行
[12] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」平成17年２月一部補訂，実教出版，平成17年２月発行
[13] 中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵　訳・解説「ユークリッド原論」縮刷版，共立出版，1996年発行
[14] 那須俊夫「変換幾何入門」，共立出版，1990年発行
[15] 矢野健太郎　編「数学小辞典」，共立出版，1968年発行
[16] 田端輝彦　他；算数・数学における比例的推論の役割－家庭科教科書の分析を通して－，日本数学教育学会第37回数学教育論文発表会論文集，*p*.759-*p*.760，平成16年11月発行
[17] 萬　伸介，田端輝彦，森岡正臣；二等辺三角形に内在する比例－小学校・中学校・高等学校における取り扱いの流れ－，愛知教育大学数学教育学会誌　イプシロン　第46号　*p*.77-*p*.84，平成16年12月発行
[18] 萬　伸介；「比例をなす」について－同値関係の視点から一つの試み（図形編）－，特定領域研究⑵*A01*班研究成果報告書「算数・数学教育における比例的推論の役割について」（研究代表者　田端輝彦），*p*.77-*p*.83，平成17年３月発行
[19] 萬　伸介；「比例をなす」について－同値関係の視点から－，日本数学教育学会誌　第87巻　*p*.12-*p*.17，平成17年10月発行
[20] Gary L. Musser, William F. Burger, Blake E. Peterson; Mathematics For Elementary Teachers a contemporary approach, sixth edition, John Wiley & Sons, Inc., 2003. ISBN0-471-16425-9.

（平成19年９月28日受理）